

§ 2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ Θ.Μ.Τ.

1. Σταθερή Συνάρτηση.

- **ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ .
- **ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$, να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.
- Ισχύουν τα παραπάνω σε ένωση διαστημάτων; Να δώσετε ένα παράδειγμα.
- Αν $f'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε ποιος ο τύπος της f ;

2. Μονοτονία Συνάρτησης.

- **ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . Αντίστοιχα όταν $f'(x) < 0$.
- Το αντίστροφο ισχύει; Να δώσετε ένα παράδειγμα.

§ 2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Η Έννοια του Τοπικού Ακροτάτου.

- **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο – ελάχιστο στο x_0 του πεδίου ορισμού της; Τι λέμε θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου – ελαχίστου; Ποιο είναι το τοπικό μέγιστο – ελάχιστο;
- Ποια είναι η διαφορά των τοπικών ακροτάτων από τα ολικά ακρότατα;
- Μπορεί ένα τοπικό μέγιστο να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο;
- Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι πάντα μέγιστο της f ;
- Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα είναι πάντα ελάχιστο της f ;

2. Προσδιορισμός των Τοπικών Ακροτάτων.

- **ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Fermat.
Ποιες είναι οι προϋποθέσεις; Ποιο το συμπέρασμα; Ισχύει το αντίστροφο; Να δώσετε ένα παράδειγμα.
- Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;
Ποια σημεία του Δ λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;
- **ΑΠΟΔΕΙΞΗ:** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
 - α) Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
 - β) Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
 - γ) Να αποδείξετε ότι αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .
- Πως βρίσκω τα ακρότατα μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα;

1. Κοίλα – Κυρτά Συνάρτησης.

- **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ ;
- **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ ;
- Όταν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε ποια είναι η σχετική θέση της C_f και της εφαπτομένης της σε κάθε σημείο του Δ ;
- Αντίστοιχα όταν η f κοίλη στο Δ ;
- Αν η f συνεχής στο Δ και $f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του Δ τότε τι κυρτότητα παρουσιάζει η f στο Δ ;
Αντίστοιχα αν $f''(x) < 0$;
- Ισχύει το αντίστροφο; Να δώσετε ένα παράδειγμα.

2. Σημεία Καμπής.

- **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Πότε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$, λέγεται σημείο καμπής της C_f ;
- Ποια είναι η σχετική θέση της C_f και της εφαπτομένης της στο $A(x_0, f(x_0))$;
- Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ποια η τιμή της f'' στο x_0 ;
- Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;
- Ποιο είναι το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου για την ύπαρξη σημείου καμπής στο x_0 ;

1. Ασύμπτωτες.

- **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f ;
- **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$;
Αντίστοιχα στο $-\infty$;
- **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$; Αντίστοιχα στο $-\infty$;
- Το όριο ποιας συνάρτησης είναι το λ και ποιας το β ;
- Σε ποια σημεία αναζητώ κατακόρυφες ασύμπτωτες;
- Σε τι μορφής διαστήματα αναζητώ οριζόντιες – πλάγιες ασύμπτωτες;
- Είναι δυνατό η C_f να έχει οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$; Αντίστοιχα στο $-\infty$;
- Ποιες συναρτήσεις δεν έχουν ασύμπτωτες;
- Μπορεί μια συνάρτηση f να έχει περισσότερες από μία ή άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες;
- Πόσες το πολύ οριζόντιες ασύμπτωτες μπορεί να έχει μια συνάρτηση f ;
- Πόσες το πολύ πλάγιες ασύμπτωτες μπορεί να έχει μια συνάρτηση f ;

2. Κανόνες de L' Hospital.

- Πότε εφαρμόζω τον κανόνα de L' Hospital; Για ποιες απροσδιόριστες μορφές ισχύει;
- Πόσες φορές μπορώ να εφαρμόσω τον κανόνα de L' Hospital;
- Ισχύουν οι κανόνες de L' Hospital και στα πλευρικά όρια;