

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΕΠΑ.Λ.

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 93.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 16.

A3. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Σωστό (ε) Λάθος

A4. (α) $(c)' = 0$ (β) $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

B1. $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu \Leftrightarrow \nu_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50$

$$\Leftrightarrow \nu_1 + 40 = 50 \Leftrightarrow \boxed{\nu_1 = 10}.$$

$$\circ f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{10}{50} = 0,20$$

$$\circ N_1 = \nu_1 = 10$$

$$\circ N_2 = \nu_1 + \nu_2 = 10 + 15 = 25$$

x_i	ν_i	f_i	N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	-

$$B2. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{0 + 15 + 22 + 24 + 24}{50} = \frac{85}{50} = \frac{170}{100} = 1,7$$

B3. Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 50 (άρτιος), τότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

$$\circ \frac{\nu}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ άρα } t_{25} = 1$$

$$\circ \frac{\nu}{2} + 1 = \frac{50}{2} + 1 = 26 \text{ άρα } t_{26} = 2$$

$$\circ \delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

B4. (α) Το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες είναι

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 88\%$$

(β) Οι νέες ώρες υπερωριών είναι $y_i = x_i + 4$. Άρα $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1.7 + 4 = 5.7$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $f'(x) = -6x^2 + 12x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
f				

- ο f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$
- ο f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$
- ο f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

Γ2. Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει:

- τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = \alpha$
- τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 2$ το $f(2) = 8 + \alpha$

$$\text{Ισχύει ότι } \frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 8 + \alpha}{2} = -8 \Leftrightarrow 2\alpha + 8 = -16 \Leftrightarrow 2\alpha = -24 \Leftrightarrow \alpha = -12$$

Γ3. Έστω $(\epsilon) : y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ η εξίσωση της εφαπτομένης. Έχουμε $f(1) = -8$ και $f'(1) = 6$ συνεπώς $(\epsilon) : y + 8 = 6(x - 1) \Leftrightarrow y + 8 = 6x - 6 \Leftrightarrow y = 6x - 14$

$$\mathbf{\Gamma 4.} \quad x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \stackrel{(-2)}{\Leftrightarrow} -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \stackrel{-4}{\Leftrightarrow} -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow f(x) \leq f(2)$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$ άρα $f(x) \leq f(2) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} x \geq 2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. ο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$

ο $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7$

ο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -4}$.

Δ2. ο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$

ο $f'(x) = x^2 - 8x + 7$

ο $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 7$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	$+$
f				

- ο f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$
- ο f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$
- ο f είναι γνησίως αύξουσα στο $[7, +\infty)$

$$\Delta 3. \quad \circ \quad 2020, 2025 \in (7, +\infty)$$

$$\circ \quad f \not\prec \sigma \tau \circ [7, +\infty)$$

$$\circ \quad 2020 < 2025 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(2020) < f(2025) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$$

$$\text{Apr} A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0.$$

$$\circ \quad \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in (1, 7)$$

$$\circ \quad f \searrow \sigma \tau \circ (1, 7)$$

$$\circ \quad \frac{3}{2} < \frac{5}{2} \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta 4. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} [(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})] \\ &= (-6)(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = -12\sqrt{3} \end{aligned}$$