άνοδος
το φροντιστήριο των επιτυχιών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 186.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161.

Α4. (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=1$, τότε $f'(1)=0$.

- $f'(x)=3x^2+\alpha x+9$
- $f'(1)=0 \Leftrightarrow 3+\alpha+9=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-6}$.

Β2. Για $\alpha=-6$: $f'(x)=3x^2-12x+9$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	

- Στο $\Delta_1=(-\infty,1]$ η f είναι συνεχής και $\nearrow$, οπότε $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right]=(-\infty,1]$. Αφού $0\in f(\Delta_1)$, τότε υπάρχει $x_1\in(-\infty,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$ και αφού $f\nearrow$, τότε το x_1 είναι μοναδικό. Επίσης $f(0)=-3$, άρα $0\in f([0,1])=[-3,1]$, άρα $x_1>0$.
- Στο $\Delta_2=[1,3]$ η f είναι συνεχής και $\searrow$, οπότε $f(\Delta_2)=[f(3),f(1)]=[-3,1]$. Αφού $0\in f(\Delta_2)$, τότε υπάρχει $x_2\in(1,3)$ $(x_2>0)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$ και αφού $f\searrow$, τότε το x_2 είναι μοναδικό.
- Στο $\Delta_3=[3,+\infty)$ η f είναι συνεχής και $\nearrow$, οπότε $f(\Delta_3)=\left[f(3),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[-3,+\infty)$. Αφού $0\in f(\Delta_3)$, τότε υπάρχει $x_3\in(3,+\infty)$ $(x_3>0)$ τέτοιο ώστε $f(x_3)=0$ και αφού $f\searrow$, τότε το x_3 είναι μοναδικό.

Τελικά η f έχει τρεις θετικές ρίζες.

Β3. ∘ $f''(x) = 6x - 12$

∘ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

∘ Η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$.

∘ Η f κυρτή στο $[2, +\infty)$.

∘ Η f έχει σημείο καμπής το $(2, -1)$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Β4. ∘ Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ είναι:
$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow \boxed{y = f(\xi) + xf'(\xi) - \xi f'(\xi)}$.

∘ Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ είναι:
$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow \boxed{y = g(\xi) + xg'(\xi) - \xi g'(\xi)}$.

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:
$f(\xi) + xf'(\xi) - \xi f'(\xi) - g(\xi) - xg'(\xi) + \xi g'(\xi) = 0 \overset{g(x)=f(x)+x}{\Leftrightarrow}$
$f(\xi) + xf'(\xi) - \xi f'(\xi) - f(\xi) - \xi - xf'(\xi) - x - \xi f'(\xi) + \xi = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$.
Οπότε τέμνονται πάνω στον $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. ∘ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0.$

∘ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2 + x}\right) = 0$

∘ $f(0) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, οπότε η f συνεχής στο $x = 0$.

∘ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 + x}{x\sqrt{x^2 + x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x+1)}{x\sqrt{x^2 + x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[(x+1) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x}}\right] = +\infty$

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Γ2. ∘ Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

∘ $\lambda = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$

∘ $\beta = \lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$
$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \dfrac{1}{2}$

Οπότε η $y = x + \dfrac{1}{2}$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

∘ $\forall x < 0 : |\eta\mu x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \eta\mu x \le 1 \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} -e^x \le e^x \eta\mu x \le e^x \Leftrightarrow -e^x \le f(x) \le e^x$

∘ $\lim\limits_{x\to -\infty} (-e^x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Άρα η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\pi, 0)$. Η εξίσωση γίνεται $e^x ημx - x - \frac{1}{2} = 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^x ημx - x - \frac{1}{2}$.

- η g συνεχής στο $[\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών.
- $\left.\begin{array}{l} g(0) = -\frac{1}{2} < 0 \\ g(-\pi) = \pi - \frac{1}{2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0)\cdot g(\pi) < 0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$ ή ισοδύναμα η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\pi, 0)$.

Γ4. Αναζητούμε $(x(t_0), y(t_0))$ ώστε $x'(t_0) = y'(t_0)$.
Ισχύει ότι $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$ άρα $y'(t) = \dfrac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$.
Αν για $t = t_0$ είναι $y'(t_0) = x'(t_0)$, τότε έχουμε:
$y'(t_0) = \dfrac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow x'(t_0) = \dfrac{x'(t_0)\,(2x(t_0) + 1)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow 2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ Άτοπο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.
- $x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln x \ln x} = e^{(\ln x)^2}$
- $(x^{\ln x})' = \left(e^{(\ln x)^2}\right)' = e^{(\ln x)^2}\cdot\left((\ln x)^2\right)' = x^{\ln x}\cdot\left(\dfrac{2\ln x}{x}\right)$
- $g'(x) = \dfrac{F'(x)x^{\ln x} - F(x)\,(x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \dfrac{xf(x)x^{\ln x} - F(x)x^{\ln x}2\ln x}{x\,(x^{\ln x})^2} = \dfrac{xf(x) - 2F(x)\ln x}{x\cdot x^{\ln x}} = 0$
  $\forall x \in (0, +\infty)$

Οπότε $g(x) = c\ \forall x \in (0, +\infty)$.

Δ2. Για $x = 1$: $1\cdot f(1) = 2F(1)\ln 1 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 0}$.

(i) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = \dfrac{f'(1)}{1} = 2.$

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2$
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x - 1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

(ii) Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της συναρτησιακής σχέσης και έχουμε:
$f(x) + xf'(x) = 2F'(x)\ln x + 2F(x)\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = 2f(x)\ln x + 2F(x)\dfrac{1}{x}\ \forall x \in (0, +\infty)$.
Για $x = 1$: $f(1) + 1\cdot f'(1) = 2f(1)\ln 1 + 2F(1) \Leftrightarrow 0 + 2 = 0 + 2F(1) \Leftrightarrow \boxed{F(1) = 1}$. Για $x = 1$: $g(1) = c \Leftrightarrow \dfrac{F(1)}{1^0} = c \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$. Άρα $g(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}$.

Δ3. ∘ $F'(x) = x^{\ln x} \cdot \dfrac{2\ln x}{x}$ με $x > 0$.

∘ $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Το πρόσημο της F' εξαρτάται από το πρόσημο του lnx.

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$	1	$\nearrow$	

∘ Η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ στο $(0, +\infty)$ έχει προφανή ρίζα το $x = 1$.

∘ Για $x > 1 \Leftrightarrow x^2 > x > 1 \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x)$ και $F(x^2) > F(x) - (x-1)^2$ αφού $-(x-1)^2 < 0$. Άρα για $x > 1$ η εξίσωση δεν έχει λύση.

∘ Για $0 < x < 1 \Leftrightarrow x^2 < x < 1 \overset{F\searrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x)$ και $F(x^2) > F(x) - (x-1)^2$. Άρα για $0 < x < 1$ η εξίσωση δεν έχει λύση.

Συνεπώς η μοναδική της λύση είναι η $x = 1$.

Δ4. Στο $[1, e]$ είναι $F(x) > 0$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int\limits_1^e |F(x)|\, dx = \int\limits_1^e F(x)dx$.

∘ $F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{(\ln x)^2}$.

∘ $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

∘ $\forall x \in (0, +\infty)$ ισχύει $e^{(\ln x)^2} \geq (\ln x)^2 + 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Ολοκληρώνοντας από 1 έως e και τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας έχουμε

$$\int\limits_1^e e^{(\ln x)^2} dx > \int\limits_1^e (\ln x)^2 + 1dx \Leftrightarrow \int\limits_1^e F(x)dx > \int\limits_1^e (\ln x)^2\, dx + \int\limits_1^e 1dx \Leftrightarrow$$

$$E > \int\limits_1^e (x)' (\ln x)^2\, dx + \int\limits_1^e 1dx \Leftrightarrow E > \left[x \cdot (\ln x)^2\right]_1^e - \int\limits_1^e 2\ln x dx + \int\limits_1^e 1dx \Leftrightarrow$$

$$E > \left[x \cdot (\ln x)^2\right]_1^e - \int\limits_1^e 2\ln x dx + \int\limits_1^e 1dx \Leftrightarrow E > \left[x \cdot (\ln x)^2\right]_1^e - 2\int\limits_1^e (x)' \cdot \ln x dx + \int\limits_1^e 1dx \Leftrightarrow$$

$$E > \left[x \cdot (\ln x)^2\right]_1^e - 2\left[x \cdot \ln x\right]_1^e + 2\int\limits_1^e 1dx + \int\limits_1^e 1dx \Leftrightarrow E > \left[x \cdot (\ln x)^2\right]_1^e - 2\left[x \cdot \ln x\right]_1^e + \left[3x\right]_1^e \Leftrightarrow$$

$$E > e - 0 - 2(e - 0) + 3e - 3 \Leftrightarrow E > 2e - 3.$$

ἀνοδος