

ΟΝΟΜΑ:	ΒΑΘΜΟΣ
ΕΠΩΝΥΜΟ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 04 – 01 – 2026	
ΤΜΗΜΑ:	
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Καλύβας Σπήλιος	

Ελάχιστος Χρόνος Δυνατής Αποχώρησης: 1 ώρα και 30 λεπτά μετά τη λήψη των θεμάτων.
(να αριθμήσετε τις σελίδες των γραπτών σας)

ΘΕΜΑ Α

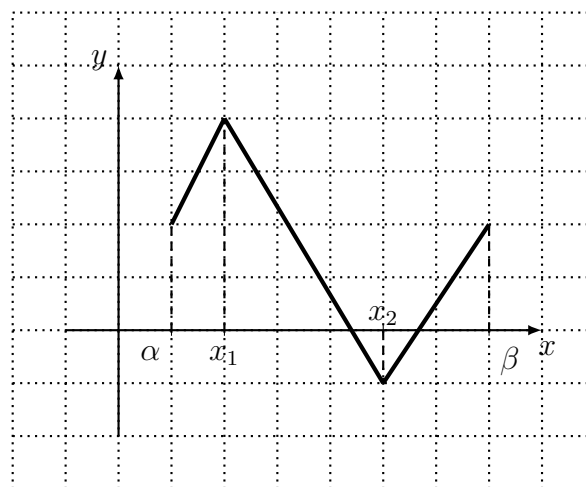
A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 4

A3. Βάσει της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.



(1) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

(2) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) .

(3) Η f ικανοποιεί το Θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

(4) Υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, την ένδειξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή την ένδειξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

(β) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(γ) Αν μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

(δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$.

(ε) Η παράγωγος μίας συνάρτησης f συμβολίζεται με $\frac{dx}{df}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x} - 2x$, με $\alpha > 0$, για την οποία ισχύει $f''(x) - f(x) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \sin x}{x} = 1$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(0, g(0))$ έχει εξίσωση $y = x + 1$.

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $y = x + 1$.

Μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την παραβολή $y = -3x^2 + e \cdot x + 1$ σε ακριβώς δύο σημεία.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda x + \mu & , \quad x \leq 1 \\ \mu\sqrt{x} & , \quad x > 1 \end{cases}$ η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0, 2]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$ και $\mu = 2$.

Μονάδες 7

Γ2. Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 4]$ και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (-1, 4)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ (Μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = (x+1)\ln(x+1) + 1$ (Μονάδες 5).

Μονάδες 7

Γ4. Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f με $x \geq 1$. Αν η τεταγμένη του M αυξάνεται με ρυθμό $2\frac{m}{sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του M την χρονική στιγμή όπου $x = 4$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3+h)}{h} = 3$
- $f(\ln x + 3) + (x-1)e^{f(x)} = (x-1)e^5 - x + 7$, για κάθε $x > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(3) = -1$ και να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον x' η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(3, f(3))$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 5$.

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 1$.

Μονάδες 4

Δ4. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι $f'(\lambda)(\lambda - 3) \leq f(\lambda) - 6 \leq -\lambda + 3$, για κάθε $\lambda \geq 3$.

Μονάδες 5

(β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(1, 3)$ υπάρχει μοναδικός αριθμός x_0 τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $K(-9, 0)$.

Μονάδες 7

κ α λ ή ε π ι τ υ χ ί α