

άνοδος

το φροντιστήριο των επιτυχιών

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΕΠΑ.Λ.

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 87.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 27.

A4. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right)' = x^2 - 2x - 3$

B2. $\circ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\circ \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$

$\circ x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$	\circ	$+$
f					

\circ Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$

\circ Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 3]$

\circ Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

\circ Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -1$ με τιμή $f(-1) = \frac{8}{3}$

\circ Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$ με τιμή $f(3) = -8$

B3. Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$, δηλαδή το $A(0, 1)$.

ο $\lambda = f'(0) = -3$, οπότε $y = -3x + \beta$

ο Αφού η ευθεία διέρχεται από το $A(0, 1)$, τότε οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν. Για $x = 0$ και $y = 1$, έχουμε: $1 = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$

Οπότε η εφαπτομένη είναι η $y = -3x + 1$.

B4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι 4, τότε

$$\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = 4 \Leftrightarrow \frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} = 4 \Leftrightarrow \frac{23+\kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow 23+\kappa = 28 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 5}$$

Γ2. ο Για $\kappa = 5$, διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: 0, 3, 4, 4, 5, 5, 7

ο Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 7, περιττός, τότε η διάμεσος θα είναι ίση με την μεσαία παρατήρηση, δηλαδή $\delta = t_4 = 4$.

Γ3.
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} (t_i - \bar{x})^2}{\nu} = \frac{(0-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{7}$$
$$= \frac{16+1+0+0+1+1+9}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

Γ4. ο $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$

ο $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{4} = 50\%$

Αφού $CV > 10\%$, τότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. ο Το εμβαδόν του ορθογωνίου ισούται με $E = x \cdot y$ με $x > 0$ και $y > 0$. Οπότε $E = 100 \Leftrightarrow x \cdot y = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$.

ο Η περίμετρος του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $\Pi = 2x + 2y$, οπότε ως συνάρτηση του x θα είναι $\Pi(x) = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$ με $x > 0$.

Δ2. ο $\Pi'(x) = \left(2x + \frac{200}{x}\right)' = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2}$

ο $\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 100)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 100) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ ή $x = -10$ όπου η αρνητική τιμή απορρίπτεται.

- ο Το πρόσημο της $\Pi'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή αφού $x^2 > 0$ για κάθε $x > 0$.

x	0	10	$+\infty$
$\Pi'(x)$	-	0	+
Π			

- ο Η Π είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 10]$ και γνησίως αύξουσα στο $[10, +\infty)$.
- ο Για $x = 10$, η περίμετρος του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, οπότε $y = \frac{100}{10} = 10$.
Τελικά το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο.

Δ3. ο Στο $(0, 10)$ η συνάρτηση Π είναι γνησίως φθίνουσα. Οπότε για $x_1, x_2 \in (0, 10)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $\Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Leftrightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$

- ο $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$

Τελικά η παράσταση $A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$.

Δ4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\frac{2(x^2-100)}{x^2}}{\sqrt{10x} - 10} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x^2-100)}{x^2(\sqrt{10x}-10)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x^2-100)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(\sqrt{10x}-10)(\sqrt{10x}+10)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x^2-100)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(10x-100)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2 \cdot 10 \cdot (x-10)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2 \cdot 10} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 20}{100 \cdot 10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$