ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 51.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 185.

Α4. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Σωστό (ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. ∘ Για το πεδίο ορισμού:

$$D_h : \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [2, +\infty) \\ \left(\sqrt{x-2}+1 > 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2}+1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$x > 2$. Άρα $D_h = (2, +\infty)$.

∘ Για τον τύπο της h:

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln(g(x) - 1) = 2\ln\left(\sqrt{x-2} + 1 - 1\right) = 2\ln\left(\sqrt{x-2}\right) = \ln\left(\sqrt{x-2}^2\right) = \ln(x-2)$

Β2. ∘ Η h είναι συνεχής στο $(2, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

∘ $h'(x) = (\ln(x-2))' = \dfrac{1}{x-2} \cdot (x-2)' = \dfrac{1}{x-2} > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$.

Άρα η h γνησίως αύξουσα στο $x \in (2, +\infty)$, οπότε και η h είναι $1-1$ και αντιστρέψιμη.

Για την εύρεση της αντίστροφης:

$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x - 2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2 \; x = \overset{\Leftrightarrow}{h}{}^{-1}(y) \; h^{-1}(y) = e^y + 2$ ή $h^{-1}(x) = e^x + 2$.

Για το πεδίο ορισμού της αντίστροφης:

Αφού $x > 2$, τότε $e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^x > 0$. Άρα $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$.

Β3. ∘ $\lim\limits_{x \to 2} (h(x)) = \lim\limits_{x \to 2} (\ln(x-2)) = \lim\limits_{u \to 0} (\ln u) = -\infty$

- Θέτω $u = x - 2$
- $u_0 = \lim\limits_{x \to 2} (x-2) = 0$

- $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\dfrac{2\ln(x-1)}{x-2} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 2}\dfrac{(2\ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x\to 2}\dfrac{2\cdot\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)'}{1} = \lim_{x\to 2}\dfrac{2}{x-1} = 2$

Οπότε $\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right) = (-\infty)\cdot 2 = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **(i)** Αφού η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ με $\ell\in\mathbb{R}$.

- Για $\kappa\neq 0$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(\kappa\cdot x) = \pm\infty$. Οπότε απορρίπτεται αυτή η περίπτωση.
- Για $\kappa = 0$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\mu x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\mu x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\mu}{x} = 0$ ανεξάρτητα απο την τιμή του μ. Άρα $\boxed{\kappa = 0}$.

(ii)
- Για $\kappa = 0$: $f(x) = \dfrac{\mu x}{x^2+1}$
- $f'(x) = \left(\dfrac{\mu x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{\mu-\mu x^2}{(x^2+1)^2}$
- Αφού η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στην αρχή των αξόνων, τότε $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.
- $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\mu}{1} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\mu = 1}$.

Γ2. **(i)**
- Για $\kappa = 0$ και $\mu = 1$: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ και $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = -1$ με τιμή $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ με τιμή $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

(ii)
- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty,-1]$, οπότε $f(\Delta_1) = \left[f(-1), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.
- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [-1,1]$, οπότε $f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.
- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3 = [1,+\infty)$, οπότε $f(\Delta_3) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$.

- Οπότε $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Για την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$:

- για $\alpha \neq 0$: $\alpha^2 > 0$, οπότε $\frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2}$, άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ είναι αδύνατη.
- για $\alpha = 0$: $\frac{1}{2} + \alpha^2 = \frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει μοναδική ρίζα το $x = 1$.

Γ3. **(i)**
$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\cdot x^2}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+1}\cdot x^2}{x^2+1}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

(ii)
- $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$
- Για $\nu = 0$: $I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2.$
- Για $\nu = 1$: $I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$.

- Η h συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πράξεις συνεχών (η g συνεχής αφού είναι παραγωγίσιμη).
- $\left.\begin{array}{l} h(-1) = g(-1) - 1 < 0 \\ h(0) = g(0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(-1)\cdot h(0) < 0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

- $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ αφού $g'(x) \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Η h' συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών, οπότε η h' θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η h είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
- Αφού $h(-1) < h(0)$ και η h είναι γνησίως μονότονη, τότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

Δ2. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο f, τότε πρέπει $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

- $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x(g(x) + x)) = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left[2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa\right] = \lim_{x\to 0^+} \left[2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x} - \kappa\right] =$ $3 - \kappa$

Τελικά $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 3}$

Δ3. Για $\kappa = 3$: $f(x) = \begin{cases} x^2\left(g(x)+x\right), & x<0 \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

(i) Στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$: $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = 0 \overset{\omega=\sigma\upsilon\nu x}{\Leftrightarrow} 2\omega^3 - 3\omega^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\omega-1)(2\omega^2-\omega-1) = 0 \Leftrightarrow$ $\omega = 1$ ή $\omega = -\dfrac{1}{2}$

- Για $\omega = 1$: $\sigma\upsilon\nu x = 1$ άρα $x = 0$
- Για $\omega = -\dfrac{1}{2}$: $\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{1}{2}$ Απορρίπτεται αφού $\sigma\upsilon\nu x > 0$ στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

x	$0 \qquad\qquad \dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$
f	$\nearrow$

Η f' συνεχής στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $f'(x) \neq 0$ στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και αφού $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2 > 0$, τότε $f'(x) > 0$ στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ είναι $f(x) \ge f(0) \Leftrightarrow f(x) \ge 0$.

(ii)
- $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\pi}{3}$
- Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε $f(\Delta) = \left[f(0), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$.

Αφού $\dfrac{\pi}{3} \in f(\Delta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \Delta$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \dfrac{\pi}{3}$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε το x_2 είναι μοναδικό.

Δ4. **(i)**
- Από το ερώτημα Δ1 έχουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε για $x_1 < x < 0$ έχουμε $h(x_1) < h(x) < h(0) \Leftrightarrow 0 < h(x) < g(0)$.
- Στο $[x_1, 0]$: $f(x) = x^2\left(g(x)+x\right) = x^2 \cdot h(x) \ge 0$.

(ii)
- $3f(x_2) = \pi \Leftrightarrow f(x_2) = \dfrac{\pi}{3}$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλύεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = x_1$ και $x = f(x_2) = \dfrac{\pi}{3}$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|dx \overset{f(x)\ge 0}{=} \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$$

- Αφού ο άξονας $y'y$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, τότε $\displaystyle\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$

- $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \ln(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}) - \frac{3\pi^2}{18} + 2\sigma\upsilon\nu 0 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Οπότε

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \left[x^3 g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)dx = -x_1^3 g(x_1) - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x) + 3x^3 - 3x^3 dx$$

$$= x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} x^2\left(g(x)+x\right)dx + \int_{x_1}^{0} 3x^3 dx = x_1^4 - 3\cdot\left(1+\ln 2 - \frac{\pi^2}{6}\right) + \left[\frac{3x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}$$

$$= x_1^4 - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$$