

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Είναι $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \ln x - 1$ (1), για κάθε $x > 0$.

$$\text{Έστω } u = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{u}$$

$$(1) \Rightarrow 2f\left(\frac{1}{u}\right) - f(u) = 3 \ln \frac{1}{u} - 1 \Rightarrow 2f\left(\frac{1}{u}\right) - f(u) = -3 \ln u - 1$$

$$\text{Για } u = x, 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = -3 \ln x - 1$$

$$\begin{cases} 2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \ln x - 1 \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = -3 \ln x - 1 \end{cases} \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} 4f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 6 \ln x - 2 \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = -3 \ln x - 1 \end{cases} \stackrel{\oplus}{\Rightarrow} 3f(x) = 3 \ln x - 3$$

$$\stackrel{:3}{\Rightarrow} f(x) = \ln x - 1$$

β) Είναι $(g \circ f)(x) = \frac{x}{e} + 2 \ln x - 3$

$$\text{Ισχύει } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \Rightarrow \frac{x}{e} + 2 \ln x - 3 = g(\ln x - 1) \quad (2)$$

$$\text{Έστω } u = \ln x - 1 \Rightarrow \ln x = u + 1 \Rightarrow x = e^{u+1}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{e^{u+1}}{e} + 2 \ln e^{u+1} - 3 = g(u) \Rightarrow e^u + 2(u+1) - 3 = g(u) \Rightarrow g(u) = e^u + 2u - 1$$

$$\text{Για } u = x, g(x) = e^x + 2x - 1$$

γ) Πρέπει να έχει μοναδική λύση η εξίσωση: $f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - 1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} - 1 = 0$

$$\text{Έστω } h(x) = \ln x - \frac{1}{x} - 1, x > 0.$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Για κάθε $x > 0$, είναι $h'(x) > 0$, άρα $h \uparrow \Delta = (0, +\infty)$.

Οπότε η h έχει σύνολο τιμών: $h(\Delta) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty)$.

Το $0 \in h(\Delta)$ και $h \uparrow \Delta$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta$, τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$.

α) Πρέπει η f να είναι 1-1.

Είναι $f(0) = f(4) = 2$, αλλά $0 \neq 4$, άρα η f δεν είναι 1-1, οπότε δεν αντιστρέφεται.

β) 1^{ος} τρόπος:

$$f^2(x) + 4x = x^2 + 4 \Rightarrow f^2(x) = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f^2(x) = (x-2)^2 \Rightarrow |f(x)| = |x-2| \quad (1)$$

Αναζητώ το πρόσημο της f .

$$\text{ρίζες: } f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |x-2| = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 2)$ και στο $(2, +\infty)$, άρα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

Είναι $f(0) = 2 > 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 2)$.

Είναι $f(4) = 2 > 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$.

Οπότε $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $\Rightarrow f(x) = |x-2|$.

2^{ος} τρόπος:

$$f^2(x) + 4x = x^2 + 4 \Rightarrow f^2(x) = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f^2(x) = (x-2)^2$$

Άρα $f(x) = x-2$, $x \in \mathbb{R}$, ή $f(x) = -x+2$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ή άπειρες κλαδικές της μορφής } f(x) = \begin{cases} x-2, & x < x_0 \\ -x+2, & x \geq x_0 \end{cases}.$$

Η f συνεχής άρα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \Rightarrow x_0 - 2 = -x_0 + 2 = -x_0 + 2 \Rightarrow x_0 - 2 = -x_0 + 2$

$$\Rightarrow 2x_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 2.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 2 \\ -x+2, & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{ή } f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}.$$

Είναι $f(0) = 2$ και $f(4) = 2$, άρα απορρίπτεται η πρώτη κλαδική, οπότε $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$

$$\text{ή } f(x) = |x-2|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma) \text{ i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-5) \frac{1}{|x-2|} = -3 \frac{1}{0^+} = -3(+\infty) = -\infty$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4 - f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4 - |x-2|}{x-2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4 - |x-2|}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4 - (-x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4 - |x - 2|}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4 - (x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 3
 \end{aligned}$$

Τελικά το όριο δεν υπάρχει.

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x - 2|}{x^2 + 1}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) = -\infty$, άρα $x - 2 < 0$, καθώς το $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x - 2|}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-x + 2)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$2-\alpha$	+	+	0	-
α	-	0	+	+
$\alpha(\alpha-2)$	-	0	+	-

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2-\alpha)x^3 + 4x^2 - 3x + 1}{\alpha x^2 - 6}$$

• Αν $\alpha \neq 2$ και $\alpha \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2-\alpha)x^3}{\alpha x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\alpha}{\alpha} x = \frac{2-\alpha}{\alpha} (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } \frac{2-\alpha}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (0, 2) \\ +\infty, & \text{αν } \frac{2-\alpha}{\alpha} < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \end{cases}$$

• Αν $\alpha = 2$, τότε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$

• Αν $\alpha = 0$, τότε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 4x^2 - 3x + 1}{-6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{-6} = +\infty$

$$\begin{aligned} \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{25x^2 - 10x + 3} - \beta x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{25 - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2}} - \beta x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{25 - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2}} - \beta x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{25 - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2}} - \beta \right) = \\ &= +\infty(5 - \beta) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } 5 - \beta > 0 \Leftrightarrow \beta < 5 \\ -\infty, & \text{αν } 5 - \beta < 0 \Leftrightarrow \beta > 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Αν $\beta = 5$, τότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{25x^2 - 10x + 3} - 5x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{25x^2 - 10x + 3}^2 - 25x^2}{\sqrt{25x^2 - 10x + 3} + 5x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25x^2 - 10x + 3 - 25x^2}{\sqrt{25x^2 - 10x + 3} + 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10x + 3}{\sqrt{25x^2 - 10x + 3} + 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-10 + \frac{3}{x} \right)}{x \sqrt{25 - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2}} + 5x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-10 + \frac{3}{x} \right)}{x \left(\sqrt{25 - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2}} + 5 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10 + \frac{3}{x}}{\sqrt{25 - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2}} + 5} = \frac{-10}{5 + 5} = -1 \end{aligned}$$

γ) Για $\alpha = 2$ και $\beta = 5$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$$\alpha) |xf(x) - \sigma\upsilon\nu x + 1| \leq x^4 \Rightarrow -x^4 \leq xf(x) - \sigma\upsilon\nu x + 1 \leq x^4$$

$$\Rightarrow -x^4 + \sigma\upsilon\nu x - 1 \leq xf(x) \leq x^4 + \sigma\upsilon\nu x - 1 \quad (1)$$

$$\Gamma\iota\alpha \ x > 0, (1) \Rightarrow -x^3 + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \leq f(x) \leq x^3 + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x^3 + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^3 + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

$$\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

$$\beta) \ xg(x) + 9 \leq 3\sqrt{x^2 + 5} - 2g(x) \Rightarrow xg(x) + 2g(x) \leq 3\sqrt{x^2 + 5} - 9$$

$$\Rightarrow (x+2)g(x) \leq 3\sqrt{x^2 + 5} - 9 \quad (1)$$

$$\text{Η } g \text{ συνεχής στο } -2, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = g(-2).$$

• για $x < -2$,

$$(1) \Rightarrow g(x) \geq \frac{3\sqrt{x^2 + 5} - 9}{x - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) \geq \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3\sqrt{x^2 + 5} - 9}{x - 2} \Rightarrow g(-2) \geq \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{9(x^2 + 5) - 81}{(x + 2)(3\sqrt{x^2 + 5} + 9)}$$

$$\Rightarrow g(-2) \geq \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{9(x^2 - 4)}{(x + 2)(3\sqrt{x^2 + 5} + 9)} \Rightarrow g(-2) \geq \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{9(x - 2)}{(3\sqrt{x^2 + 5} + 9)} \Rightarrow g(-2) \geq \frac{-36}{18} \Rightarrow \boxed{g(-2) \geq -2}$$

• για $x > -2$,

$$(1) \Rightarrow g(x) \leq \frac{3\sqrt{x^2 + 5} - 9}{x - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3\sqrt{x^2 + 5} - 9}{x - 2} \Rightarrow g(-2) \leq \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{9(x^2 + 5) - 81}{(x + 2)(3\sqrt{x^2 + 5} + 9)}$$

$$\Rightarrow g(-2) \leq \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{9(x^2 - 4)}{(x + 2)(3\sqrt{x^2 + 5} + 9)} \Rightarrow g(-2) \leq \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{9(x - 2)}{(3\sqrt{x^2 + 5} + 9)} \Rightarrow g(-2) \leq \frac{-36}{18} \Rightarrow \boxed{g(-2) \leq -2}$$

$$\text{Τελικά } g(-2) = -2.$$

γ) Έχω την εξίσωση:

$$\frac{f(x)}{x} + \frac{g(x)}{x+2} = \frac{1}{x^2 + 2x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} + \frac{g(x)}{x+2} = \frac{1}{x(x+2)} \Leftrightarrow (x+2)f(x) + xg(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2)f(x) + xg(x) - 1 = 0$$

$$\text{Έστω } h(x) = (x+2)f(x) + 2g(x) - 1, \ x \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμόζω ΘΒ στο $[-2,0]$:

- h συνεχής στο $[-2,0]$, πράξη μεταξύ συνεχών συναρτήσεων
- $h(-2) = -2g(-2) - 1 = -2(-2) - 1 = 3 > 0$

$$h(0) = 2f(0) - 1 = -1 < 0$$

Άρα, σύμφωνα με το Θ.Β., υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda \in (-2,0)$ τέτοιο ώστε $h(\lambda) = 0$

δ) Η f συνεχής στο $[0,2]$, άρα έχει μία ελάχιστη τιμή m και μία μέγιστη τιμή M .

Οπότε ισχύει: $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [0,2]$.

$$\text{για } x = 0, \quad m \leq f(0) \leq M$$

$$\text{για } x = 1, \quad m \leq f(1) \leq M$$

$$\text{για } x = 2, \quad m \leq f(2) \leq M$$

$$\overset{\oplus}{\Rightarrow} 3m \leq f(0) + f(1) + f(2) \leq 3M \Rightarrow m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leq M$$

Άρα υπάρχει $x_o \in [0,2]$, τέτοιο ώστε

$$f(x_o) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \overset{f(0)=0}{\Rightarrow} f(x_o) = \frac{f(1) + f(2)}{3} \Rightarrow 3f(x_o) = f(1) + f(2)$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Αναζητώ μονοτονία και σύνολο τιμών της f στο $(0,1)$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα } f \uparrow \mathbb{R}.$$

$$\text{Οπότε } f \uparrow \Delta = (0,1) \Rightarrow f(\Delta) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = \left(-1, 1 - \frac{1}{e} \right)$$

Το $0 \in f(\Delta)$ και $f \uparrow \Delta$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta = (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

$$\beta) f \uparrow \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Το $-2 \in f(\mathbb{R})$ και $f \uparrow \mathbb{R}$, άρα υπάρχει μοναδικό $\alpha \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(\alpha) = -2$.

ε) Η εξίσωση $f(e^x - x) = f(2 - x)$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η $f \uparrow \mathbb{R}$, άρα είναι 1-1.

$$f(e^x - x) = f(2 - x) \Leftrightarrow e^x - x = 2 - x \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

ζ) Η ανίσωση $f(\ln x + x) < f(x - 1)$ ορίζεται για κάθε $x > 0$.

$$f(\ln x + x) < f(x - 1) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x + x < x - 1 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < e^{-1} \text{ και } x > 0, \text{ άρα } 0 < x < \frac{1}{e}$$

η) Η f 1-1, άρα υπάρχει f^{-1} , η οποία ορίζεται για κάθε $x \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Η εξίσωση $f^{-1}(\eta\mu x - 1) = 0$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$f^{-1}(\eta\mu x - 1) = 0 \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(\eta\mu x - 1)) = f(0) \Leftrightarrow \eta\mu x - 1 = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

$$\begin{aligned}
 \alpha) (f(x) - x)(f(x) + x) &= 2f(x) \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow f^2(x) - x^2 = 2f(x) \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x \\
 &\Rightarrow f^2(x) - 2f(x) \cdot \eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x \\
 &\stackrel{+\eta\mu^2 x}{\Rightarrow} f^2(x) - 2f(x) \cdot \eta\mu x + \eta\mu^2 x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x \\
 &\Rightarrow (f(x) - \eta\mu x)^2 = x^2 + 1 \\
 &\Rightarrow |f(x) - \eta\mu x| = \sqrt{x^2 + 1} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Αναζητώ το πρόσημο της συνάρτησης $h(x) = f(x) - \eta\mu x$.

ρίζες: $h(x) = 0 \Leftrightarrow |h(x)| = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x^2 + 1} = 0$, αδύνατο.

Άρα $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Άρα η h διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Είναι $h(0) = f(0) - \eta\mu 0 = 1 > 0$, άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε, $(1) \Rightarrow f(x) - \eta\mu x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \eta\mu x$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \eta\mu x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + \eta\mu x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} 2x + \sigma\upsilon\nu x}{1} = 1$$

$$\gamma) xg(x) + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow xg(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sigma\upsilon\nu x}{x}, \quad x \neq 0$$

Η g συνεχής στο 0, άρα:

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sigma\upsilon\nu x}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sigma\upsilon\nu x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} 2x + \eta\mu x}{1} = 0.$$

$$\text{Τελικά } g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sigma\upsilon\nu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sigma\upsilon\nu x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} - \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu x \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = -1$$

$$\bullet \text{ Για κάθε } x \neq 0, \left| \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Rightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\text{Τελικά } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu x \right) = -1$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) Είναι $\ln f(x) - \frac{2}{f(x)} = x \quad (1), \quad x \in \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \ln f(x_1) = \ln f(x_2) \\ f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} = \frac{1}{f(x_2)} \Rightarrow -\frac{1}{f(x_1)} = -\frac{1}{f(x_2)} \xrightarrow{\cdot 2} -\frac{2}{f(x_1)} = -\frac{2}{f(x_2)} \end{aligned} \right\} \overset{\oplus}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ln f(x_1) - \frac{2}{f(x_1)} = \ln f(x_2) - \frac{2}{f(x_2)} \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1 = x_2, \text{ άρα η } f \text{ 1-1.}$$

β) Η f 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Έστω $f(x) = y$.

$$(1) \Rightarrow \ln y - \frac{2}{y} = x, \text{ άρα } f^{-1}(y) = \ln y - \frac{2}{y}, \quad y \in f(\mathbb{R}) = (0, +\infty).$$

$$\text{Οπότε } f^{-1}(x) = \ln x - \frac{2}{x}, \quad x > 0.$$

γ) Είναι $f^{-1}(1) = \ln 1 - \frac{2}{1} = -2$, άρα: $f^{-1}(x) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = f^{-1}(1) \overset{f^{-1} \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x = 1$

δ) Είναι $f^{-1}(1) = -2 \Rightarrow f(-2) = 1$

ε) Η ανίσωση $\ln \frac{e^x + x^2}{x^2 + 1} < \frac{2}{e^x + x^2} - \frac{2}{x^2 + 1}$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \ln \frac{e^x + x^2}{x^2 + 1} < \frac{2}{e^x + x^2} - \frac{2}{x^2 + 1} &\Leftrightarrow \ln(e^x + x^2) - \ln(x^2 + 1) < \frac{2}{e^x + x^2} - \frac{2}{x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \ln(e^x + x^2) - \frac{2}{e^x + x^2} < \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(e^x + x^2) < f^{-1}(x^2 + 1) \quad (2) \end{aligned}$$

Αναζητώ τη μονοτονία της $f^{-1}(x) = \ln x - \frac{2}{x}, \quad x > 0$.

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$. Για κάθε $x > 0$, είναι $(f^{-1})'(x) > 0$, άρα $f^{-1} \uparrow (0, +\infty)$.

$$(2) \Leftrightarrow e^x + x^2 < x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow e^x < 1$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

α) Είναι $(f \circ f)(x) = f(x) + 6x - 6$ (1), $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2))$

$$\Rightarrow (f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2)$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x_1) + 6x_1 - 6 = f(x_2) + 6x_2 - 6$$

$$\stackrel{f(x_1)=f(x_2)}{\Rightarrow} 6x_1 - 6 = 6x_2 - 6$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

β) Για $x = 1$, (1) $\Rightarrow (f \circ f)(1) = f(1) + 6 - 6$

$$\Rightarrow f(f(1)) = f(1)$$

$$\stackrel{f(1)=1}{\Rightarrow} f(1) = 1$$

γ) Είναι $f(0) = f(1) + 2 \Rightarrow f(0) = 1 + 2 \Rightarrow f(0) = 3$

Για $x = f^{-1}(0)$, (1) $\Rightarrow (f \circ f)(f^{-1}(0)) = f(f^{-1}(0)) + 6f^{-1}(0) - 6$

$$\Rightarrow f(f(f^{-1}(0))) = 0 + 6f^{-1}(0) - 6$$

$$\Rightarrow f(0) = 6f^{-1}(0) - 6$$

$$\Rightarrow 3 = 6f^{-1}(0) - 6$$

$$\Rightarrow f^{-1}(0) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

δ) $f^{-1}(x) = 3 \Leftrightarrow \stackrel{f(1)=1}{f(f^{-1}(x))} = f(3) \Leftrightarrow x = f(3)$ (2)

Για $x = 0$, (1) $\Rightarrow (f \circ f)(0) = f(0) + 6 \cdot 0 - 6$

$$\Rightarrow f(f(0)) = f(0) - 6$$

$$\Rightarrow f(3) = 3 - 6$$

$$\Rightarrow f(3) = -3$$

Άρα (2) $\Leftrightarrow x = -3$

ε) $f(1 - f^{-1}(e^x - 2)) = 3 \Leftrightarrow f(1 - f^{-1}(e^x - 2)) = f(0)$

$$\Leftrightarrow \stackrel{f(1)=1}{1 - f^{-1}(e^x - 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(e^x - 2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \stackrel{f(1)=1}{f(f^{-1}(e^x - 2))} = f(1)$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 3$$

9. Δίνεται $x+1 \leq f(x) \leq e^x$, $x \in \mathbb{R}$ (1)

α) Για $x=0$, (1) $\Rightarrow 1 \leq f(0) \leq 1$, άρα $f(0)=1$.

Είναι: $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Άρα η f συνεχής για $x=0$.

β) Πρέπει να υπάρξει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x}$.

$$(1) \Rightarrow x \leq f(x) - 1 \leq e^x - 1 \quad (2)$$

$$\bullet \text{ αν } x > 0, (2) \Rightarrow 1 \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq \frac{e^x-1}{x}.$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x-1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1} = 1.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = 1.$$

$$\bullet \text{ αν } x < 0, (2) \Rightarrow 1 \geq \frac{f(x)-1}{x} \geq \frac{e^x-1}{x}.$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^x-1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{1} = 1.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-1}{x} = 1.$$

$$\text{Τελικά } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1, \text{ άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη για } x=0, \text{ με } f'(0)=1.$$

γ) Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 1 \cdot x \Rightarrow y = x + 1.$$

δ) Είναι $g(x) = x \ln x + 2$, $x > 0$, με $g'(x) = \ln x + 1$.

Έστω σημείο $M(x_0, g(x_0))$ της C_g με εφαπτομένη:

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = g'(x_0)x - g'(x_0)x_0 + g(x_0).$$

Η $\varepsilon: y = x + 1$ εφάπτεται της C_g στο M όταν:

$$g'(x_0) = 1 \quad (1) \quad \text{και} \quad -g'(x_0)x_0 + g(x_0) = 1 \Leftrightarrow -x_0 + g(x_0) = 1 \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow \ln x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Για $x_0 = 1$, (2) $\Leftrightarrow -1 + g(1) = 1 \Leftrightarrow -1 + 2 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, που ισχύει.

Άρα η $\varepsilon: y = x + 1$ εφάπτεται της C_g στο $M(1, g(1))$.

10. α) αφού η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο $[-2,0]$, η f είναι συνεχής στο $[-2,0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2,0)$.

• για $x < -1$ η f συνεχής ως πολυωνυμική

για $x > -1$ η f συνεχής ως άρρητη

για $x = -1$ η f συνεχής όταν: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$ (1)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \alpha + \beta + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{-2+3} = 1$$

$$f(0) = \sqrt{-2+3} = 1$$

$$(1) \Leftrightarrow \alpha + \beta + 3 = 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 3 = 1 \quad (2)$$

• για $x < -1$ η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

για $x > -1$ η f παραγωγίσιμη ως άρρητη

για $x = -1$ η f παραγωγίσιμη όταν: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \in \mathbb{R}$ (3)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\alpha x^2 - \beta x + 3 - 1}{x + 1} \stackrel{0}{=} \lim_{(3) x \rightarrow -1^-} \frac{(\alpha x^2 - \beta x + 2)'}{(x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2\alpha x - \beta}{1} = -2\alpha - \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{2x+3} - 1}{x + 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(\sqrt{2x+3} - 1)'}{(x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x+3}} \cdot 2}{1} = 1$$

$$(3) \Leftrightarrow -2\alpha - \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = -2\alpha - 1$$

$$(2) \Leftrightarrow \alpha - 2\alpha - 1 + 3 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\beta = -2\alpha - 1 \Leftrightarrow \beta = -3.$$

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -3$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 3, & x < -1 \\ \sqrt{2x+3}, & x \geq -1 \end{cases}$

για $x < -1$, $f'(x) = 2x + 3$

για $x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

για $x = -1$, από ερώτημα α) είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = -2\alpha - \beta = -2 + 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = 1$$

άρα $f'(-1) = 1$

$$\text{οπότε } f'(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < -1 \\ 1, & x = -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+3}}, & x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+3}}, & x > -1 \end{cases}$$

• η f συνεχής στο $[-3,3]$, από ερώτημα α)

• η f παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$

- $f(-3) = (-3)^2 + 3(-3) + 3 = 9 - 9 + 3 = 3$

$$f(3) = \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{άρα } f(-3) = f(3)$$

$$\stackrel{\text{OR}}{\Rightarrow} \text{υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in (-3, 3) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = 0$$

$$\text{αν } \xi \in (-3, -1], \text{ τότε } f'(\xi) = 2\xi + 3, \text{ άρα } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi + 3 = 0 \Leftrightarrow \xi = -\frac{3}{2}, \text{ δεκτή}$$

$$\text{αν } \xi \in (-1, 3), \text{ τότε } f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\xi + 3}}, \text{ άρα } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\xi + 3}} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0, \text{ αδύνατο.}$$

γ) Η εφαπτομένη ζ της C_f στο σημείο $M(-1, f(-1))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = f'(-1) = 1$

$$\text{Ισχύει } \lambda_1 = \varepsilon\phi\omega \Rightarrow \varepsilon\phi\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$

δ) $g(x) = 1 - (x - 2)\ln(x - 2), D_g = (2, +\infty)$

$$g'(x) = 0 - [(x - 2)' \ln(x - 2) + (x - 2)(\ln(x - 2))'] = -\ln(x - 2) - (x - 2) \frac{1}{x - 2} = -\ln(x - 2) - 1$$

Έστω $K(x_o, g(x_o))$ σημείο της C_g στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ζ .

Η ζ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$.

Η εφαπτομένη της C_g έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = g'(x_o)$.

Για να είναι κάθετες πρέπει

$$\lambda_1 \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow 1 \cdot g'(x_o) = -1 \Leftrightarrow -\ln(x_o - 2) - 1 = -1 \Leftrightarrow \ln(x_o - 2) = 0 \Leftrightarrow x_o - 2 = 1 \Leftrightarrow x_o = 3$$

Άρα $K(3, g(3))$ και η εφαπτομένη: $y - g(3) = g'(3)(x - 3) \Rightarrow y - 1 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 4$